Exercice 1

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{k}{e^k}$$

1. a. $2n+2+e(2n+1) = 2n+1) = 2n(1-e)+2-e$

or $1 - e < 0$ et $2-e<0$ donc :

$(2n + 2) - e(2n + 1) < 0$

b. $$U_{2n+2} - U_{2n} = (-1)^{2n+1} \frac{2n+1}{e^{2n+1}} + \frac{2n+2}{e^{2n+2}} = \frac{2n+2}{e^{2n+2}} - \frac{2(2n+1)}{e^{2n+2}}$$

$$U_{2n+2} - U_{2n} = e^{2n+2}\left[(2n+2) - e(2n+1)\right]$$

D'où d'après 1.a. $U_{2n+2} - U_{2n} < 0$ c'est-à-dire $(U_{2n})_{n\in N^*}$ est une suite strictement décroissante su N^*

2. $$U_{2n+1} - U_{2n-1} = \frac{2n}{e^{2n}} - \frac{2n+1}{e^{2n+1}} = \frac{e2n - 2n + 1}{e^{2n+1}}$$

$$U_{2n+1} - U_{2n-1} = \frac{1}{e^{2n+1}}\left[e(2(n-1)+2) - (2(n-1)+3)\right]$$

$\Rightarrow U_{2n+1} - U_{2n-1}$ a le même signe que :

$2(n-1)[e-1] + (2e-3)$

Or $e-1 > 0$ et $2^e-3> 0$ donc

$U_{2n+1} - U_{2n-1} > 0$ donc la suite (U_{2n+1}) est strictement croissante

3. a. $$U_{2n+1} - U_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}(2n+1)}{e^{2n+1}} = -\frac{2n+1}{e^{2n+1}} < 0$$ donc $U_{2n} > U_{2n+1}$

b. $$U_{2n} > U_{2n+1} = \frac{2n+1}{e^{2n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$$

4. d'après ce qui précède les suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont deux suite adjacents donc elle convergent vers la même limite α.

Or (U_{2n}) est décroissante donc : $U_{2n} < U_2 \Rightarrow \alpha \leq U_2$

Qarray.tn Agra Blech- Qarray.tn